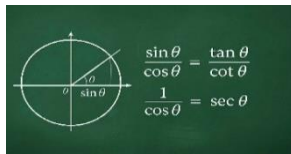
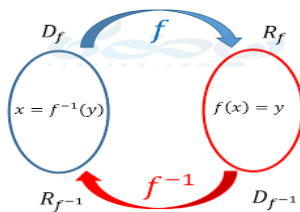
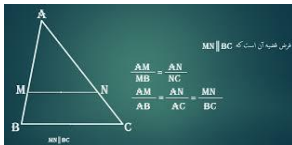


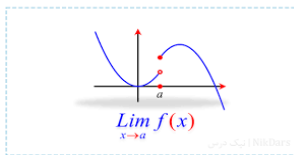
شیب دو خط موازی $m' = m$

شیب دو خط عمود برهم $m' = -\frac{1}{m}$



روش حل معادلات لگاریتمی

$$\log_5^{(x+6)} + \log_5^{(x+2)} = 1$$



هندسه تحلیلی، معادله درجه دوم، نمودار تابع درجه دو، معادلات گویا و اصم

ترسیم هندسی، تناسب و خواص آن، استدلال ریاضی و قضیه تالس، تشابه مثلثها

مقدمات توابع، انواعی از تابع، توابع یک به یک و وارون، جبر توابع

واحدهای زاویه، روابط مثلثاتی، توابع مثلثاتی و رسم

تابع نمایی، لگاریتم، خواص لگاریتم، کاربرد لگاریتم

فرآیند میل کردن، محاسبه حد تابع، حدهای مبهم، پیوستگی

مقدمات احتمال، احتمال شرطی، آمار توصیفی

۲-۱- هندسه تحلیلی و جبر ۲

۲-۲- هندسه ۱۴۶

۳-۳- تابع ۸۰

۴-۴- مثلثات ۱۱۴

۵-۵- تابع نمایی و لگاریتم ۱۴۱

۶-۶- حد و پیوستگی ۱۴۹

۷-۷- احتمال و آمار ۱۹۶



سخنی با دانش آموز

در سال‌های اخیر، تنوع منابع آموزشی و کتاب‌های کمک‌درسی به حدی افزایش یافته که بسیاری از دانش‌آموزان در انتخاب بهترین منبع برای یادگیری دچار تردید می‌شوند. این سردرگمی گاهی مسیر پیشرفت تحصیلی را دشوار می‌کند و نیاز به یک راهنمای جامع و کاربردی را بیش از پیش آشکار می‌سازد. با توجه به این چالش، بر آن شدم تا با تکیه بر سال‌ها تجربه در تدریس و آموزش، مجموعه‌ای کامل و منسجم از **جزوات خودآموز سناموز** را طراحی کنم؛ جزواتی که با پوشش تمامی فصول درسی رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی و تطابق کامل با آخرین تغییرات کتاب‌های درسی، به دانش‌آموزان کمک می‌کند مفاهیم را عمیق‌تر و مؤثرتر بیاموزند.

چرا جزوات سناموز؟

- یادگیری گام‌به‌گام: آموزش ساده و روان مفاهیم، همراه با مثال‌های متنوع برای درک بهتر هر مبحث.
- تمرین و تسلط: حل نمونه سوالات امتحانات نهایی، تست‌های کنکور سراسری، سوالات تألیفی و چالشی برای تقویت مهارت‌های حل مسئله.
- آمادگی برای امتحانات: ارائه نمونه سوالات خردادماه با پاسخ‌های تشریحی جهت مرور و جمع‌بندی نهایی.

این جزوات به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که دانش‌آموزان بتوانند به‌صورت **خودآموز** از آن‌ها استفاده کنند و دیگر نیازی به منابع متعدد نداشته باشند.

هیچ اثری بدون نقص نیست، بنابراین از تمامی دانش‌آموزان، دبیران و صاحب‌نظران گرامی تقاضا دارم نظرات و پیشنهادات خود را از طریق **وبسایت رسمی سناموز** به آدرس www.sanamoz.ir با من در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی، این مجموعه را به استانداردهای بالاتری برسانیم.

در پایان، از خانواده عزیزم که در تمام مراحل تألیف این مجموعه با صبر و حمایت بی‌چشمداشت‌شان همراه من بودند، صمیمانه قدردانی می‌کنم. امیدوارم این جزوات گامی مؤثر در مسیر موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان ایران باشد.

به زودی با جلد‌های بعدی در خدمت شما خواهیم بود 😊





هندسه تحلیلی و جبری

صفحه	فهرست مطالب
۳	هندسه تحلیلی
۲۰	معادله درجه دوم
۳۰	نمودار تابع درجه دو
۳۹	معادلات گویا و اصم

هندسه تحلیلی

یادآوری:

معادله‌ی هر خط بر حسب x و y یک معادله درجه‌ی یک است. مانند:

$$y = -x + 3 \quad \text{یا} \quad y = -6 \quad \text{یا} \quad x + 3 = 4 \quad \text{یا} \quad 4x + 2y = -5$$

در برخی موارد برای نشان دادن خطها، معمولاً نمایش هندسی آنها مفید است.

روش رسم خط:

با توجه به اینکه از هر دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد:

رسم خط، با تعیین مختصات دو نقطه روی آن انجام می‌شود.

مثال: (از کتاب) خط به معادله $y = 2x + 1$ را رسم کنید.

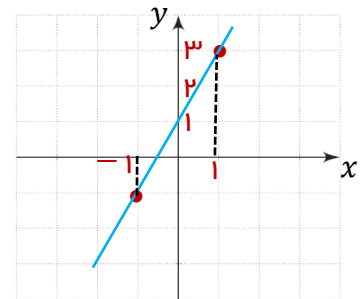
پاسخ

جای x دو عدد دلخواه قرار داده و y را مشخص می‌کنیم تا مختصات دو نقطه معلوم شود:

$$x = 1 : y = 2(1) + 1 = 3$$

$$x = -1 : y = 2(-1) + 1 = -1$$

x	-1	1
y	-1	3



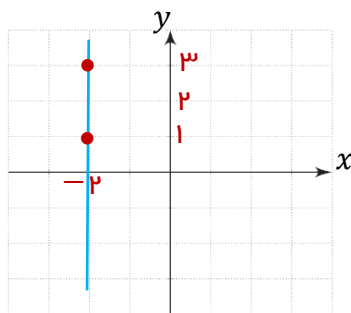
مثال: خطهای $x = -2$ و $2y - 2 = 0$ را رسم کنید.

پاسخ

در معادله $x = -2$ حرف y وجود ندارد، یعنی:

مقدار x فقط می‌تواند -2 باشد ولی مقدار y هر عدد دلخواهی است.

پرای مثال، نقاط $(-2, 1)$ و $(-2, 3)$ روی خط قرار داشته و خط رسم می‌شود:

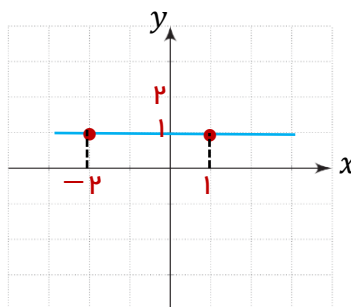


همین‌طور، در معادله $2y - 2 = 0$ داریم:

$$2y - 2 = 0 \rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{2} = 1$$

در معادله‌ی ساده شده $y = 1$ مقدار x هر عددی می‌تواند باشد، ولی y فقط 1 است.

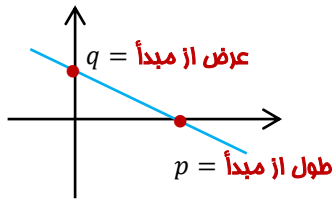
نقاط $(-2, 1)$ و $(1, 1)$ روی خط هستند.



برخورد خط با محورها:

عرض از مبدأ: این عدد عرض نقطه‌ای است که خط در آن، محور y را قطع کرده.

طول از مبدأ: این عدد طول نقطه‌ای است که خط در آن، محور x را قطع کرده.



هر دو مقدار در شکل دیده می‌شوند:

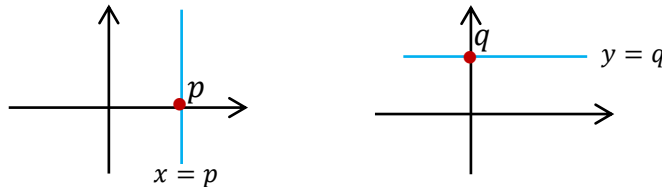
روش بدست آوردن عرض از مبدأ و طول از مبدأ :

اگر در معادله به جای y صفر قرار می‌دهیم یعنی: $y = 0 \iff$ جواب x ، طول از مبدأ فضا است.

و اگر در معادله به جای x صفر قرار می‌دهیم یعنی: $x = 0 \iff$ جواب y ، عرض از مبدأ فضا است.

حالت‌های خاص:

خط افقی طول از مبدأ نداشته و خط عمودی، عرض از مبدأ ندارد.



مثال: عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط $l: -6x + 3y = 3$ را مشخص کنید.

پاسخ

طبق روش بالا:

عرض از مبدأ $x = 0: -6(0) + 3y = 3 \rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$

طول از مبدأ $y = 0: -6x + 3(0) = 3 \rightarrow -6x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

---*---

شیب خط:

شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی.

یعنی وقتی دو نقطه از یک خط را داشته باشیم:

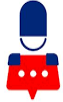
نسبت اختلاف عرض نقاط به اختلاف طول نقاط را **شیب** آن فضا می‌گویند.

یعنی:

اگر دو نقطه‌ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از خط داده شوند، شیب خط برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$

چرا $x_1 \neq x_2$ ؟ اگر $x_1 = x_2$ باشد چی میشه؟



مثال: خطی از دو نقطه‌ی $(-1, 4)$ و $(3, 5)$ عبور می‌کند؛ شیب آن را حساب کنید.

پاسخ

طبق فرمول شیب خط:

$$\left(\begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right) \Rightarrow m = \frac{5 - (-1)}{3 - (-1)} = \frac{6}{4} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

مثال: خطی محورهای مختصات را در طول ۳ و عرض ۱- قطع کرده است. شیب آن را بیابید.

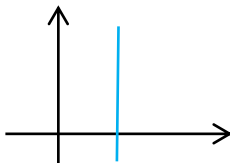
پاسخ

نقطه‌ی $(0, 3)$ روی محور طول‌ها یعنی $(0, 3)$ و نقطه‌ی $(-1, 0)$ روی محور عرض یعنی $(-1, 0)$. پس شیب چنین است:

$$m = \frac{0 - (-1)}{3 - 0} = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

نکته:

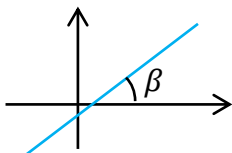
❖ در مورد خط‌های عمودی، شیب تعریف نشده است.



❖ شیب هر خط افقی برابر صفر است.



❖ شیب خط، دقیقاً تانژانت زاویه‌ی بین خط با جهت مثبت محور طول است.



نتیجه:

برای آن که دو خط موازی باشند، باید شیب‌های آن‌ها برابر باشد.

نوشتن معادله: (روش اول)

برای نوشتن معادله‌ی هر خط، باید شیب (m) و مختصات یک نقطه روی آن (x_0, y_0) را بدانیم، در این صورت معادله‌ی خط را به صورت $y = mx + h$ نوشته و با جایگذاری مختصات (x_0, y_0) در معادله، مقدار h را معلوم می‌کنیم.

نمونه کنید:

اگر معادله‌ی خط را به صورت مرتب شده‌ی $y = ax + b$ بنویسیم، عدد a ، یعنی ضریب x همان شیب خط است.

✦ **مثال:** شیب و عرض از مبدأ خط $6x - 3y = 1$ را بیابید.

پاسخ ✓

معادله را مرتب می‌کنیم یعنی باید y را در سمت چپ تنها کرده و ضریب آن به $+1$ تبدیل کرد:

$$6x - 3y = 1 \rightarrow -3y = -6x + 1 \xrightarrow{\div(-3)} y = \frac{-6}{-3}x + \frac{1}{-3}$$

معادله به صورت $y = 2x - \frac{1}{3}$ ساده می‌شود و بنابراین: $m = 2$ شیب خط و $h = -\frac{1}{3}$ عرض از مبدأ خط است.

--- ✦ ---

✦ **مثال:** اگر خط d به معادله‌ی $d: 4x - 2y = 1$ و خط d' با آن موازی باشد، شیب d' را تعیین کنید.

پاسخ ✓

شیب خط d را توسط انتخاب دو نقطه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$4x - 2y = 1 \rightarrow -2y = -4x + 1 \rightarrow y = 2x - \frac{1}{2}$$

بنا به نتیجه صفحه قبل چون $m_d = 2$ است، پس شیب خط موازی آن، یعنی شیب خط d' هم برابر ۲ خواهد بود.

--- ✦ ---

نوشتن معادله: (روش دوم)

معادله‌ی خط را می‌توانیم به صورت زیر هم بنویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

زیرا:

وقتی (x, y) نقطه‌ی دلخواهی از خط باشد، طبق تعریف شیب خط باید:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال ✨: معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(1, -4)$ و $(3, 2)$ را بنویسید. (به دو روش)

پاسخ ✓

روش اول: شیب خط را مشخص می‌کنیم: $m = \frac{2 - (-4)}{3 - 1} = \frac{6}{2} \Rightarrow m = 3$

معادله را به صورت $y = 3x + h$ نوشته و یکی از نقاط دلخواه را در آن جایگزین می‌کنیم:

$$\left(\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right) : y = 3x + h \rightarrow 2 = 3(3) + h \rightarrow h = 2 - 9 = -7$$

$$\rightarrow y = 3x - 7 \xrightarrow{\text{یا}} y + 7 = 3x$$

روش دوم: با استفاده از رابطه $y - y_0 = m(x - x_0)$ و جایگذاری شیب و یک نقطه دلخواه از بالا خواهیم داشت:

$$\left(\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right) \text{ و } m = 3 \rightarrow y - 2 = 3(x - 3) \rightarrow y - 2 = 3x - 9$$

$$\rightarrow y - 2 + 9 = 3x \xrightarrow{\text{یا}} y + 7 = 3x$$

--- ✨ ---

مثال ✨: معادله‌ی خط با عرض از مبدأ 4 و طول از مبدأ -1 را بنویسید.

پاسخ ✓

طبق اطلاعات داده شده، خط از نقاط $(0, 4)$ و $(-1, 0)$ گذشته است. پس: $m = \frac{0 - 4}{-1 - 0} = 4$ می‌باشد و معادله:

$$\text{نقطه دلخواه } (-1, 0) \Rightarrow y - 0 = 4(x - (-1)) \Rightarrow y = 4x + 4$$

--- ✨ ---

مثال ✨: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه‌ی $(5, -3)$ گذشته و محور افقی را در نقطه‌ای به طول 2 قطع کند.

پاسخ ✓

نقطه‌ی روی محور افقی $(2, 0)$ است، مانند قبل: $m = \frac{0 - (-3)}{2 - 5} = -1$ است و در نتیجه:

$$y = -1x + h \xrightarrow{\left(\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right)} 0 = -1(2) + h \xrightarrow{h=2} y = -x + 2$$

--- ✨ ---

مثال ✨: معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(5, -2)$ و $(5, 0)$ را بنویسید.

پاسخ ✓

توجه کنید: طول‌های دو نقطه برابر است، یعنی خط عمودی بوده و شیب آن تعریف نشده است. اکنون:

چون خط عمودی است و باید از نقطه‌ای به طول 5 عبور کند، معادله‌اش $x = 5$ است.

--- ✨ ---

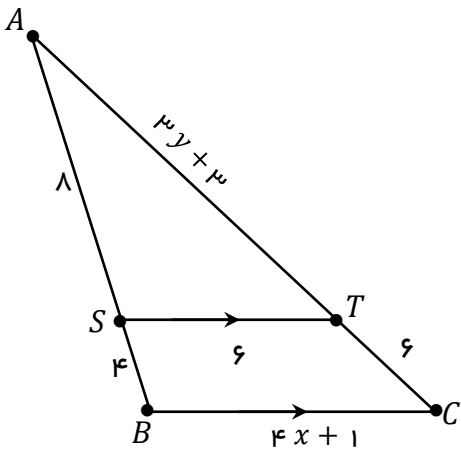


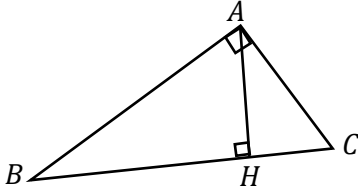
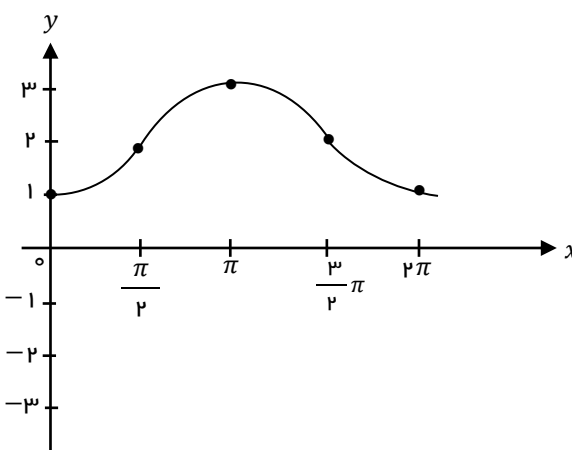
سؤالات نهایی

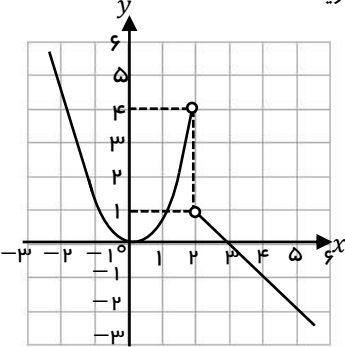
صفحه	فهرست مطالب
۲۲۱	سؤالات نهایی

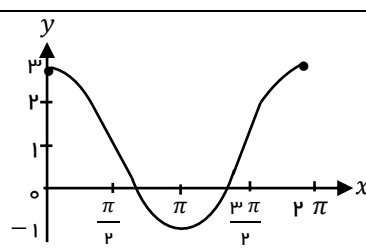
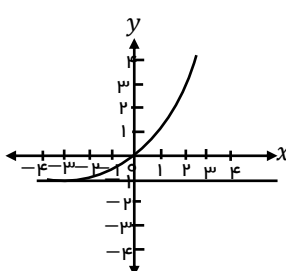
مل سوالات این بخش را می‌توانید در آپارات ببینید:



ردیف	سوالات نهایی خرداد ماه ۱۴۰۲	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) برای هر عدد حقیقی داریم $[x + k] = [x] + k$. $[x]$ نشان دهنده جزء صحیح x است.</p> <p>ب) اگر تمام داده‌های آماری را ۲ برابر کنیم، انحراف معیار نیز ۲ برابر می‌شود.</p> <p>ج) دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند.</p>	۰/۷۵
۲	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطه برخورد می‌باشد.</p> <p>ب) حد تابع $f(x) = \frac{x+4}{[x]+3}$ وقتی $x \rightarrow -1^-$ ، برابر است.</p> <p>ج) مقدار مینیمم تابع $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ برابر با است.</p> <p>د) حداکثر مقدار تابع $f(x) = \cos x$ برابر است که در نقاط به طول حاصل می‌شود.</p>	۱/۲۵
۳	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>I ضابطه وارون تابع $f(x) = 3x - 2$ کدام است؟</p> <p>الف) $f^{-1}(x) = -3x + 2$</p> <p>ب) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$</p> <p>ج) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$</p> <p>د) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$</p> <p>II کدام یک از توابع زیر در کل دامنه خود یک به یک است؟</p> <p>الف) $f(x) = x^2$</p> <p>ب) $f(x) = x$</p> <p>ج) $f(x) = [x]$</p> <p>د) $f(x) = 2^x$</p>	۰/۵
۴	<p>نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y - x = 5$ می‌باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.</p>	۰/۷۵
۵	<p>معادله $2x = 1 - \sqrt{2-x}$ را حل کنید.</p>	۱
۶	<p>در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقدار y ، x را بدست آورید.</p> 	۱/۲۵

بارم	ردیف	ادامه سوالات نهایی خرداد ماه ۱۴۰۲
۱	۷	<p>در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو اندازه پاره‌خط‌های خواسته شده را بدست آورید.</p> <p>$BH = 9$, $AH = 6$, $BC = ?$ $AC = ?$</p> 
۱/۵	۸	<p>نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x-3}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.</p>
۱/۵	۹	<p>حاصل عبارت زیر را بدست آورید و مراحل محاسبه را بنویسید.</p> <p>$\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$</p>
۱	۱۰	<p>نمودار رسم شده، مربوط به کدام ضابطه است؟ نمودار ضابطه دیگر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.</p> <p>الف) $y = 2 \cos x + 1$ ب) $y = 2 - \cos x$</p> 
۱/۵	۱۱	<p>نمودار تابع $f(x) = 2^x - 1$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را به صورت بازه بنویسید.</p>
۲	۱۲	<p>معادله (الف) را حل کنید و حاصل عبارت (ب) را به دست آورید.</p> <p>الف) $\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$ ب) $\log_{12} 4 + 2 \log_{12} 6 =$</p>
۱	۱۳	<p>حاصل حد زیر را بدست آورید.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} =$</p>

ردیف	ادامه سؤالات نهایی خرداد ماه ۱۴۰۲	بارم
۱۴	<p>با استفاده از نمودار مقابل، مقادیر خواسته شده را در صورت وجود بدست آورید.</p>  <p>الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$</p> <p>ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$</p>	۰/۷۵
۱۵	<p>پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} 2x - 9 & x > 2 \\ -5 & x = 2 \\ -2x^2 + 3 & x < 2 \end{cases}$	۱/۵
۱۶	<p>احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی ترنی رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورت بردن رقیب اصلی اش این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش می‌یابد. با چه احتمالی حداقل یکی از این دو اتفاق (قهرمانی یا بردن رقیب اصلی) برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟</p>	۱/۲۵
۱۷	<p>نمرات ریاضی یک کلاس به قرار زیر است:</p> <p>۱۹, ۱۱, ۱۷, ۱۴, ۱۵, ۱۷, ۲۰, ۱۳, ۱۸, ۱۶</p> <p>میانه و انحراف معیار را برای این جامعه آماری بدست آورید.</p>	۱/۵

بارم	پاسخنامه تشریحی خرداد ماه ۱۴۰۲	ردیف
۰/۷۵	(الف) نادرست (ب) درست (ج) نادرست	۱
۱/۲۵	(الف) عمود منصف‌های اضلاع مثلث (ج) ۲ (ب) ۳ (د) ۱ $x = 2k\pi$	۲
۰/۵	I. ج II. د	۳
۰/۷۵	$AH = \frac{ -3 + 0 - 5 }{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \rightarrow S = \frac{64}{2} = 32$	۴
۱	$(2x - 1)^2 = (-\sqrt{2-x})^2 \rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 2 - x \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$ $\rightarrow x_1 = 1$, غیر قابل قبول , $x_2 = \frac{-1}{4}$	۵
۱/۲۵	$ST \parallel BC \rightarrow \frac{AS}{SB} = \frac{AT}{TC} , \frac{AS}{AB} = \frac{ST}{BC}$ $\frac{\lambda}{4} = \frac{3y+3}{6} \rightarrow 3y + 3 = 12 \rightarrow y = 3$ $\frac{\lambda}{12} = \frac{6}{4x+1} \rightarrow \lambda x + 2 = 18 \rightarrow x = 2$	۶
۱	$AH^2 = BH \times HC \rightarrow 36 = 9 \times HC \rightarrow HC = 4 \rightarrow BC = 13$ $AC^2 = HC \times BC \rightarrow AC^2 = 4 \times 13 \rightarrow AC = 2\sqrt{13}$	۷
۱/۵	$D_f = [3, +\infty)$ $R_f = (-\infty, 1]$	۸
۱/۵	$\sin\left(\lambda\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{3}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 0$	۹
۱	نمودار مربوط به ضابطه (ب) است. 	۱۰
۱/۵	 $D_f = (-\infty, +\infty)$ $R_f = (-1, +\infty)$	۱۱