

واسطه هندسی:

اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، b را واسطه‌ی هندسی مثبت بین a و c می‌گوییم در این صورت داریم:

$$a, b, c \Rightarrow b^2 = a \times c \Rightarrow b = \sqrt{ac}$$

یعنی حاصل ضرب جملات کناری برابر توان دوم جمله‌ی وسطی.

مثال: واسطه‌ی هندسی مثبت بین اعداد ۴ و ۱۶ را بیابید.

پاسخ

$$b^2 = a \times c \Rightarrow b^2 = 16 \times 4 = 64 \Rightarrow b = \sqrt{64} = 8$$

مثال: در دنباله‌ی هندسی افزایشی زیر مقدار x و y را بیابید.

$3, x, 75, y$

پاسخ

$$x^2 = 3 \times 75 = 225 \Rightarrow x = \sqrt{225} = 15 \quad r = \frac{15}{3} = 5 \Rightarrow y = 75 \times 5 = 375$$

مثال: اگر سه جمله‌ی $x + 2, x, x + 1$ تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، ابتدا مقدار x و سپس نسبت مشترک را بیابید.

پاسخ

$$a = x + 2, b = x, c = x - 1, b^2 = a \times c \Rightarrow x^2 = (x + 2)(x - 1)$$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x = 2$$

با جایگذاری مقدار $x = 2$ جملات دنباله برابر: ۱، ۲، ۴ است که اختلاف مشترک دنباله $r = \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

مثال: چه عددی را به هر یک از اعداد ۴ و ۲۲ و ۴۹ اضافه کنیم تا اعداد حاصل به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند؟

پاسخ

فرض کنید عدد x را به آن‌ها اضافه کنیم در این صورت داریم:

$x + 4, x + 22, x + 49$

$$a = x + 4, b = x + 22, c = x + 49, b^2 = a \times c \Rightarrow (x + 22)^2 = (x + 4)(x + 49)$$

$$x^2 + 44x + 484 = x^2 + 53x + 196 \Rightarrow 44x - 53x = 196 - 484 \Rightarrow -9x = -288$$

$$\Rightarrow x = \frac{288}{9} = 32$$

---*---

مثال: سه عدد تشکیل دنباله هندسی می‌دهند اگر حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ باشد در این صورت عدد وسطی را بیابید.

پاسخ

$$a \times b \times c = 216, \quad b^2 = a \times c \Rightarrow b^3 = 216 \Rightarrow b = \sqrt[3]{216} = 6$$

---*---

درج کردن k واسطه هندسی بین دو عدد a, b :

اگر بخواهیم بین دو عدد a, b تعداد k واسطه هندسی چنان درج کنیم تا این $k + 2$ عدد تشکیل دنباله هندسی دهند در این صورت:

$$r^{k+1} = \frac{b}{a}$$

مثال: بین دو عدد ۶ و ۱۶۲ دو عدد چنان درج کنید که تشکیل دنباله هندسی دهند؟

پاسخ

$$a = 6, \quad b = 162, \quad k = 2, \quad r^{k+1} = \frac{162}{6} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = \sqrt[3]{27} \Rightarrow r = 3$$

$$\Rightarrow 6, 18, 54, 162$$

---*---

مثال: بین دو عدد ۸ و ۱۲۸ سه واسطه هندسی درج کرده‌ایم. نسبت مشترک را بیابید.

پاسخ

$$r^{k+1} = \frac{b}{a}, \quad r^4 = \frac{128}{8} = 16 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = 2$$

---*---

مثال: بین دو عدد ۱ و ۶۴ دو واسطه هندسی مثبت درج کرده‌ایم. مجموع تمام اعداد دنباله را بیابید.

پاسخ

$$r^{k+1} = \frac{b}{a}, \quad r^3 = \frac{64}{1} = 64 \Rightarrow r = \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow 1, 4, 16, 64$$

$$\Rightarrow S = 1 + 4 + 16 + 64 = 85$$

---*---

مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی:

در یک دنباله‌ی هندسی مجموع n جمله‌ی اول آن یا S_n به صورت زیر است:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

مجموع n جمله اول دنباله هندسی:

فرمول مجموع جملات دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و نسبت مشترک r را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

اثبات:

$$S_n = a + a \times r + a \times r^2 + \dots + a \times r^{n-1}$$

$$r \times S_n = a \times r + a \times r^2 + a \times r^3 + \dots + a \times r^n$$

با کم کردن سطر اول از سطر دوم داریم:

$$S_n - r \times S_n = a - a \times r^n \Rightarrow S_n(1 - r) = a(1 - r^n) \Rightarrow S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

نکته ۵

اگر جمله‌ی اول و آخر یک دنباله‌ی هندسی را داشته باشیم و بخواهیم مجموع n جمله‌ی اول آن از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$S_n = \frac{a - r a_n}{1 - r}$$

مثال: مجموع شش جمله‌ی اول دنباله‌ی زیر را بیابید.

$$80, 40, 20, \dots \quad a = 80, \quad r = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}, \quad n = 6, \quad S_6 = ?$$

پاسخ

$$\begin{aligned} S_6 &= 80 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 80 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{\frac{1}{2}} = 80 \times 2 \left(1 - \frac{1}{64}\right) = 160 \times \left(\frac{63}{64} - \frac{1}{64}\right) \\ &= 160 \times \frac{63}{64} = 157.5 \end{aligned}$$



مثال: مجموع پنج جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{3}, 1, 3, \dots$ بیابید.

پاسخ

$$a = 3, r = \frac{1}{3}, n = 5, S_5 = ?$$

$$S_5 = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} = 3 \times \frac{\frac{242}{243}}{\frac{2}{3}} = 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{242}{243} = \frac{9}{2} \times \frac{242}{243} = \frac{121}{27}$$

مثال: دنباله‌ی $8, 16, 32, \dots$ را در نظر بگیرید:

الف) نسبت مشترک آن را بیابید.

ب) جمله‌ی هفتم دنباله را بیابید.

پ) مجموع چهار جمله اول دنباله را بیابید.

پاسخ

الف) $r = 16 \div 8 = 2$

ب) $a = 8, r = 2, a_7 = a \times r^6 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 8 \times \frac{1}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

پ) $S_4 = 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \times \frac{1 - \frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = 8 \times 2 \times \left(\frac{15}{16} - \frac{1}{16}\right) = 16 \times \frac{15}{16} = \frac{16 \times 15}{16} = 4 \times 15 = 60$

مثال: دنباله‌ی $3, 9, 27, \dots, 729$ را در نظر بگیرید:

الف) تعداد جملات این دنباله را بیابید؟

ب) مجموع جملات آن را بیابید.

پاسخ

الف) $a = 3, a_n = 729, r = \frac{9}{3} = 3, n = ?, 3^{n-1} = \frac{729}{3} = 243 = 3^5$

$$\Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

ب) $a = 3, r = 3, n = 6, a_n = 729, S_n = \frac{a - ra_n}{1 - r}, S_6 = \frac{3 - 729 \times 3}{1 - 3} = \frac{3 - 2187}{-2} = 1092$

مثال: در دنباله‌ی هندسی $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

الف) جمله‌ی عمومی دنباله و به کمک آن جمله‌ی پنجم را بیابید.

ب) مقدار S_{10} را بیابید.

پاسخ

الف) $a = 2, r = \frac{1}{2}, a_n = a \times r^{n-1} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_5 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

ب) $S_{10} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = 2 \times 2 \left(\frac{1024}{1024} - \frac{1}{1024}\right) = 4 \times \frac{1023}{1024} = \frac{1023}{256}$

مثال: مجموع‌های زیر را بیابید.

پاسخ

۱) $1 + 2 + 4 + \dots + 1024 = ?$ $a = 1, r = 2, a_n = 1024,$

$$r^{n-1} = \frac{a_n}{a} \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{1024}{1} = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

$$S_n = \frac{a - ra_n}{1 - r}, S_{11} = \frac{1 - 1024 \times 2}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047$$

۲) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{128} = ?$ $a = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}, a_n = \frac{1}{128}$

$$r^{n-1} = \frac{a_n}{a} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

$$S_7 = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{128} = \frac{128}{128} - \frac{1}{128} = \frac{127}{128}$$

مثال: نخستین جمله یک دنباله‌ی هندسی 5103 و نسبت مشترک این دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{3}$ است.

الف) کدام جمله دنباله برابر 7 است؟

ب) مجموع جملات این دنباله از 5103 تا عدد 7 را بدست آورید.

پاسخ

الف) $a = 5103, a_n = 7, r = \frac{1}{3},$

$$r^{n-1} = \frac{a_n}{a} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{7}{5103} = \frac{1}{729} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$$



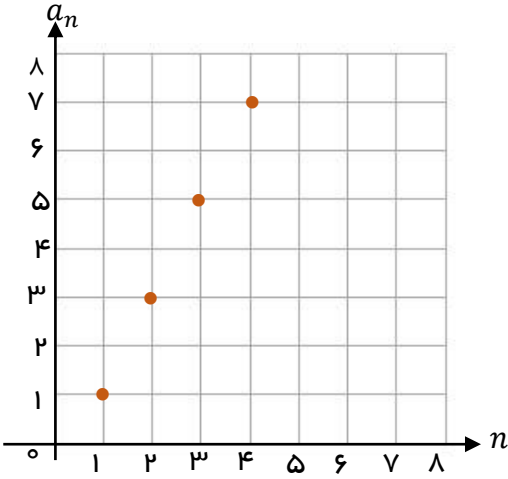
سوالات نهایی

صفحه	فهرست
۱۷۱	■ سوالات نهایی
	■

حل سوالات این بخش را می‌توانید در آپارات ببینید:



ردیف	سؤالات نهایی خرداد ماه ۱۴۰۲	بارم
۱	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. (الف) تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه ۵ عضوی برابر ۱۵ است. (ب) پیشامد $B - A$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد B رخ دهد و پیشامد A رخ ندهد. (ج) هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط آن، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است. (د) اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت جرم آن \sqrt{a} برابر می‌شود.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) اگر پیشامد A با فضای نمونه‌ای S برابر باشد، A را یک پیشامد می‌گویند. (ب) در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک r ، اگر $r = 1$ باشد، آن‌گاه دنباله است. (ج) ریشه‌های چهارم عدد ۱۰ برابر است با و	۱
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. (الف) کدام گزینه جزء گام تحلیل داده‌ها در چرخه حل مسائل آماری محسوب نمی‌شود؟ (۱) استفاده از نمودارها (۲) مرتب کردن داده‌ها (۳) گزارش معیارها (۴) تفسیر داده‌ها (ب) در یک نمودار جعبه‌ای اگر چارک اول برابر ۳ و دامنه میان چارکی آن (IQR) برابر ۱۱ باشد، چارک سوم آن کدام است؟ (۱) ۱۴ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۵ (ج) چه تعداد از دنباله‌های زیر هندسی نیست؟ $۲, ۲\sqrt{۲}, ۴, \dots$ $۴, ۸, ۱۲, \dots$ $۸, ۴, ۲, \dots$ $۳, ۶, ۱۲, \dots$ (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار (د) در تساوی $(\frac{۵}{۲۷})^{۱۵} = (\frac{۵}{۲۷})^{x+۱} \times (\frac{۵}{۲۷})^۵ \times (\frac{۵}{۲۷})^۲$ مقدار x کدام است؟ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹	۱
۴	با ارقام ۳، ۲، ۷، ۹، ۴، ۸ چند عدد سه رقمی زوج، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟	۰/۷۵
۵	دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را مشخص کنید: (الف) حاصل ضرب اعداد رو شده از دو تاس بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰ باشد. (ب) مجموع اعداد رو شده از دو تاس برابر ۱۳ باشد.	۰/۷۵ ۰/۲۵

ردیف	ادامه سؤالات نهایی خرداد ماه ۱۴۰۲	بارم
۶	می‌خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۴ والیبالیست یک گروه ۶ نفره به طور تصادفی تشکیل دهیم. مطلوبست احتمال اینکه: الف) حداقل ۴ نفر فوتبالیست باشند. ب) به تعداد مساوی از هر دو رشته ورزشی انتخاب شوند.	۱/۲۵ ۰/۷۵
۷	با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ، $b_n = n^2 + 1$ حاصل عبارت $2a_1 + b_3$ را بنویسید.	۱
۸	جمله پنجم دنباله بازگشتی زیر را مشخص کنید. $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$	۱
۹	با توجه به نمودار دنباله داده شده، با نوشتن اعضای دنباله، جمله عمومی آن را بنویسید.	۰/۵
		
۱۰	یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۴۷ و جمله هفدهم آن ۷۷ است. جمله اول این دنباله را به دست آورید.	۱
۱۱	در دنباله حسابی مقابل $2, 5, 8, 11, \dots$ الف) جمله چندم آن ۹۵ است؟ ب) مجموع <u>چهار</u> جمله اول این دنباله را به دست آورید.	۰/۷۵ ۱
۱۲	در دنباله هندسی مقابل $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$ الف) جمله عمومی دنباله را بنویسید. ب) رابطه بازگشتی آن را مشخص کنید.	۰/۵ ۰/۵
۱۳	اگر $5 + x, 3, x - 3$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی افزایشی باشند، مقدار x را به دست آورید.	۱/۲۵

ردیف	ادامه سؤالات نهایی خرداد ماه ۱۴۰۲	بارم
۱۴	جمله اول یک دنباله هندسی ۶ و نسبت مشترک این دنباله ۲ است: الف) جمله <u>نهم</u> این دنباله را بنویسید. ب) مجموع <u>ده</u> جمله اول این دنباله را بیابید.	۰/۷۵ ۱
۱۵	عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. الف) $\sqrt[4]{(3/5)^4}$ ب) $2^{5/6}$	۱
۱۶	حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. $(a^{2/3} \cdot b^{4/3})^3 \times (a^4)^{1/4} =$	۱/۲۵
۱۷	نمودار مختصاتی تابع $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ را رسم کنید.	۰/۷۵
۱۸	جمعیت کشوری در سال ۲۰۲۳ میلادی، حدود <u>بیست میلیون</u> نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور به صورت نمایی و با نرخ <u>دو درصد</u> در حال کاهش باشد، جمعیت این کشور در سال ۲۰۲۴ میلادی چند نفر خواهد بود؟	۱

بارم	پاسخنامه تشریحی خرداد ماه ۱۴۰۲	ردیف
۱	(الف) نادرست (ب) درست (ج) درست (د) نادرست	۱
۱	(الف) حتمی (ب) ثابت (ج) $\sqrt[4]{10}, -\sqrt[4]{10}$	۲
۱	(الف) گزینه ۴ (ب) گزینه ۳ (ج) گزینه ۱ (د) گزینه ۲	۳
۰/۷۵	$5 \times 4 \times 3 = 60$	۴
۱	(الف) $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$ (ب) تهی یا \emptyset یا $\{ \}$	۵
۱/۲۵	$n(S) = \binom{9}{6} = \frac{9!}{3! \times 6!} = 84$ $P(A) = \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{2} + \binom{5}{5} \binom{4}{1}}{\binom{9}{6}} = \frac{30 + 4}{84} = \frac{34}{84}$	(الف) ۶
۰/۷۵	$P(B) = \frac{\binom{5}{3} \binom{4}{3}}{\binom{9}{6}} = \frac{10 \times 4}{84} = \frac{40}{84}$	(ب)
۱	$a_1 = \frac{(-1)^1}{1} = \frac{1}{1}$ $b_3 = (3)^2 + 1 = 10$ $1 \left(\frac{1}{1} \right) + 10 = 1 + 10 = 11$	۷
۱	$\xrightarrow{n=1} a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3$ $\xrightarrow{n=2} a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5$	۸
۰/۵	$1, 3, 5, \dots$ $a_n = 2n - 1$	۹
۱	$\begin{cases} a_1 + 10d = 47 \\ a_1 + 16d = 77 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a_1 - 10d = -47 \\ a_1 + 16d = 77 \end{cases}$ $\underline{\hspace{10em}} \hspace{2em} d = 5 \quad a_1 = -3$ $d = \frac{77-47}{16-10} = 5$ $47 = a_1 + 10 \times 5 \Rightarrow a_1 = -3$	۱۰ راه حل اول: راه حل دوم: